

Interpolacja, ekstrapolacja i aproksymacja funkcji

Interpolacja - oszacowanie wartości (zwł. funkcji mat.) znajdujących się między dwiema znanymi wartościami.

łac. *interpolatio* 'przekształcenie' od *interpolare* 'przekształcać; fałszować za pomocą wstawek'; od *inter-* łac. 'między; przy; na; wpośród'; *polare-* od *polire* 'polerować; oczyszczać'

Ekstrapolacja - wnioskowanie o tendencjach rozwojowych, stosunkach, warunkach, wartościach (zwł. funkcji mat.) na zewnątrz jakiegoś przedziału na podstawie znanych, zaobserwowanych tendencji, wartości itp. wewnątrz niego.

łac. *extra* - 'na zewnątrz, poza; oprócz; bez'

Aproksymacja - przybliżenie, ujęcie w sposób przybliżony; mat. przybliżanie, zastępowanie we wzorach jakichś wielkości innymi, prostszymi, dogodniejszymi; konstruowanie ciągu przybliżeń wielkości niewiadomej.

łac. *approximatus* p.p. od *approximare* 'przybliżyć'; *ap-* zob. *ad-*; *proximare* 'zbliżać się' od *proximus* 'najbliższy' stopień najwyższy od *prope* 'blisko'

źródło: *Słownik Wyrazów Obcych Władysława Kopalińskiego*

Interpolacja

Interpolacja linowa

Założenie:

$$f_i \equiv f(x_i) \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n+1;$$

$f(x)$ jest funkcją gładką, tzn. $\forall \exists f^{(k)}(x)$
 $k \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$f(x) = f_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} (f_{i+1} - f_i) + \varepsilon(x)$$

gdzie:

$$\varepsilon(x) = \frac{f''(a)}{2} (x - x_i)(x - x_{i+1})$$

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{\max(|f''(a)|)}{8} (x_{i+1} - x_i)^2$$

$$a \in [x_i, x_{i+1}]$$

Interpolacja Lagrange'a

Krzywa stopnia n przechodząca przez $n+1$ punktów

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} f_k P_k^{(n)}(x) + \varepsilon(x)$$

gdzie

$$P_k^{(n)}(x) = \prod_{j \neq k}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

błąd interpolacji:

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{\max(|f^{(n+1)}(a)|)}{4(n+1)} h^{n+1}$$

dla

$$a \in [x_1, x_{n+1}]$$

$$h = \frac{x_{n+1} - x_1}{n} \quad \text{- punkty równoodległe}$$

Aproksymacja

Założenie:

$g_1(x), g_2(x), \dots, g_r(x)$ - liniowo niezależne funkcje, będące elementami przestrzeni liniowej unormowanej E .

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) = \left\| f(x) - \sum_{k=1}^r \lambda_k g_k(x) \right\| = \min$$

przykład normy kwadratowej dla danych ciągłych i dyskretnych (aproksymacja średniokwadratowa):

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^r \lambda_k g_k(x) \right\| = \sqrt{\int_{x_1}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \sum_{k=1}^r \lambda_k g_k(x) \right)^2 dx}$$

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^r \lambda_k g_k(x) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} \left(f(x_i) - \sum_{k=1}^r \lambda_k g_k(x_i) \right)^2}$$

norma kwadratowa z funkcją wagową $p(x)$

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^r \lambda_k g_k(x) \right\| = \sqrt{\int_{x_1}^{x_{n+1}} p(x) \left(f(x) - \sum_{k=1}^r \lambda_k g_k(x) \right)^2 dx}$$

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^r \lambda_k g_k(x) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} p(x_i) \left(f(x_i) - \sum_{k=1}^r \lambda_k g_k(x_i) \right)^2}$$

aproksymacja jednostajna

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^r \lambda_k g_k(x) \right\| = \max_{x \in [a, b]} \left| f(x) - \sum_{k=1}^r \lambda_k g_k(x) \right|$$

Twierdzenie Weierstrassa (o aproksymacji funkcji)

Jeżeli f jest funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $[a, b]$, to dla dowolnie małej liczby dodatniej ε istnieje:

1. Wielomian rzeczywisty $W_n(x) \equiv \sum_{k=0}^n a_k x^k$

taki, że $\forall_{x \in [a, b]} |f(x) - W_n(x)| < \varepsilon$

2. Wielomian trygonometryczny

$$T_m(x) \equiv \sum_{k=0}^m (\alpha_k \cos k\omega x + \beta_k \sin k\omega x)$$

taki, że $\forall_{x \in [a, b]} |f(x) - T_m(x)| < \varepsilon$

Funkcję $\sum_{k=1}^r \lambda_k g_k(x)$ nazywamy *aproksymacją* $f(x)$.

Wielomiany ortogonalne

Układ ortogonalny na przedziale $[a, b]$ z funkcją wagową $p(x)$:

$$\int_a^b g_i(x) g_j(x) p(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j \\ \text{const} & \text{dla } i = j \end{cases}$$

wielomiany Czebyszewa

przedział $(-1, 1)$; $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$T_0(x) = 1 \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_1(x) = x \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

ogólnie: $T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$

wielomiany Legendre'a

przedział $[-1,1]$; $p(x) = 1$

$$P_0(x) = 1 \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_1(x) = x \qquad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$\text{ogólnie: } (k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x)$$

Inne: wielomiany Hermite'a, Laguerre'a, i inne.

Ekstrapolacja

Możliwość teoretyczna \rightarrow wzór Taylora (?)

Funkcja jednej zmiennej: $f \in C^{n+1}([a,b])$

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt, \quad \xi \in (a,x)$$

$a=0 \Rightarrow$ rozwinięcie McLaurina

Funkcja dwu zmiennych:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!} [f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)] + \\ + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(x - a)^2 + f''_{xy}(x - a)(y - b) + f''_{yy}(y - b)^2] + \dots + R_n$$

Przykładowe rozwinięcia funkcji:

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + \\ + (-1)^n \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad \text{dla } m > 1, |x| \leq 1$$

$$(1 \pm x)^{-m} = 1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!} x^2 \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} x^3 + \dots + \\ + (-1)^n \frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{n!} x^n + \dots \quad \text{dla } m > 1, |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \text{dla } -1 \leq x < 1$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \text{dla } |x| < \infty$$

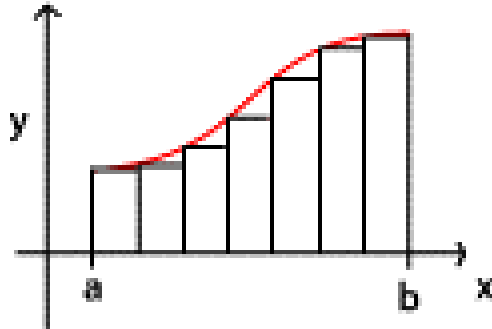
Praktyczne metody ekstrapolacji

Aproksymacja \Rightarrow znana funkcja $\sum_{k=1}^r \lambda_k g_k(x) \Rightarrow$ Ekstrapolacja

Całkowanie numeryczne

Obliczanie całki oznaczonej $\int_a^b f(x)dx$

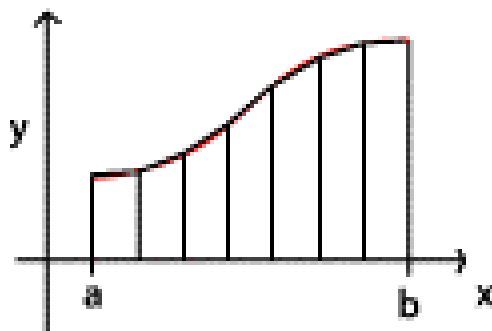
1. Stałe przybliżenie - metoda prostokątów



$$\int_a^b f(x)dx \cong h \sum_{i=1}^n f_i \cong h \sum_{i=1}^n f_{i+1}$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong h \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

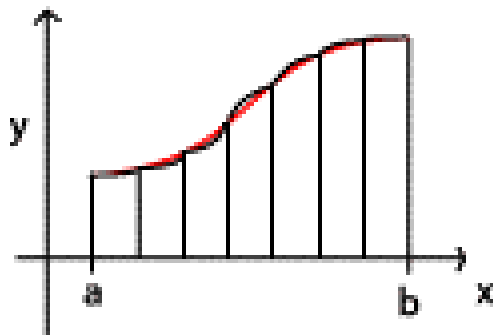
2. Przybliżenie liniowe - metoda trapezów



$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{1}{2}h \sum_{i=1}^n (f_i + f_{i+1}) = h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=2}^n f_i \right)$$

$$\frac{1}{12} h^3 \min_{x \in [a,b]} |f''(x)| \leq \varepsilon \leq \frac{1}{12} h^3 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

3. Przybliżenie kwadratowe - aproksymacja parabolami (metoda Simpsona)



$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\cong \frac{1}{3}h \sum_{i=1}^{(n+1)/2} (f_{2i-2} + 4f_{2i-1} + f_{2i}) = \\ &= \frac{1}{3}h \left(f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=1}^{(n+1)/2} f_{2i-1} + \sum_{i=1}^{(n+1)/2} f_{2i} \right)\end{aligned}$$

oszacowanie błędu:

$$\frac{1}{90}h^5 \min_{x \in [a,b]} |f^{IV}(x)| \leq \varepsilon \leq \frac{1}{90}h^5 \max_{x \in [a,b]} |f^{IV}(x)|$$